Corrigé de l'examen d'Analyse 3 (Session 1)

ECUE : Intégrales généralisés et Séries de fonctions

Durée : 1 heure 30

Les calculatrices et les documents sont interdits. Les trois exercices sont indépendants.
Une attention particulière devra être apportée à la rédaction qui sera un élément important d'appréciation.

EXERCICE 1:

1. a. Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t$ converge.

   b. Calculer la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t$ à l'aide du changement de variable $x = t - \dfrac{1}{t}$.

2. a. Pour quel réel a la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \left(\ln(n) + a\ln\left(n - \frac{1}{n}\right)\right)$ converge ?

   b. Pour cette valeur de a, calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\ln(n) + a\ln\left(n - \frac{1}{n}\right)\right)$

1. a. La fonction $t \longmapsto f(t) = \dfrac{1+t^2}{1+t^4}$ est continue sur $[0, +\infty[$. De plus $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ et comme

1 pt $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge, on en déduit donc que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+t^2}{1+t^4}\mathrm{d}x$ converge.

   b. Pour le calcul de l'intégrale, effectuons le changement de variable $x = t - \dfrac{1}{t}$. D'où :

$t = 0^+ \Longrightarrow x = -\infty$, $t = +\infty \Longrightarrow x = +\infty$, $\mathrm{d}x = \dfrac{1+t^2}{t^2}\mathrm{d}t$ et $x^2 + 2 = \dfrac{t^4+1}{t^2}$. Par suite,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{1+t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} \cdot \frac{1+t^2}{t^2}\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2}\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}}\left[\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^{+\infty}
\end{aligned}$$

2 pts
$$\int_0^{+\infty} \frac{1+t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

2. a. Posons pour tout $n \geq 2$, $u_n = \ln(n) + a\ln\left(n - \dfrac{1}{n}\right)$. On a

$$\begin{aligned}
u_n &= \ln(n) + a\ln\left(n - \frac{1}{n}\right) \\
&= \ln(n) + a\ln\left[n\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$= (a+1)\ln(n) + a\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$
$$u_n = (a+1)\ln(n) - \frac{a}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

$\boxed{0{,}5 \text{ pt}}$ – Pour $a \neq -1$, $u_n \sim (a+1)\ln(n)$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty \neq 0$. Par conséquent la série $\sum\limits_{n\geq 2} u_n$ diverge.

$\boxed{0{,}5 \text{ pt}}$ – Soit $a = -1$. On a $u_n \sim \dfrac{1}{n^2}$. Comme $\sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{1}{n^2}$ converge, on en déduit que la série $\sum\limits_{n\geq 2} u_n$ converge.

$\boxed{0{,}5 \text{ pt}}$ En conclusion la série $\sum\limits_{n\geq 2} \left(\ln(n) + a\ln\left(n - \dfrac{1}{n}\right)\right)$ converge si et seulement si $a = -1$.

b Calculer la somme de la série pour $a = -1$: on a pour tout $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} u_n &= -\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \ln\left(\frac{n^2}{(n-1)(n+1)}\right) \\ &= [\ln(n) - \ln(n+1)] - [\ln(n-1) - \ln(n)] \\ u_n &= v_{n+1} - v_n \end{aligned}$$

où $v_n = \ln(n-1) - \ln(n)$. Il s'agit d'une série télescopique, donc

$$\sum_{n=2}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n - v_2.$$

On a $v_2 = -\ln(2)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln\dfrac{n-1}{n} = 0$. Donc

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\ln(n) - \ln\left(n - \frac{1}{n}\right)\right) = \ln(2).$$

EXERCICE 2:

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_n : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{-nx}\sin(nx) \end{array}$

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,+\infty[$
2. Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,+\infty[$.
3. Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[a,+\infty[$ pour tout $a > 0$.
4. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx}\sin(nx)\mathrm{d}x$.

1 Convergence simple sur $[0,+\infty[$:

– On a $f_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$.

1 pt – Pour tout $x \in]0, +\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|f_n(x)| \leq e^{-nx}$. Comme $\lim_{n\to+\infty} e^{-nx} = 0$, on a $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

On vient de montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$ $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$, donc la suite de fonctions

0,5 pt $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f nulle sur $[0, +\infty[$.

2. Convergence uniforme sur $[0, +\infty[$:

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{1}{n} \in [0, +\infty[$, donc

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)| \geq \left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \frac{1}{e}\sin(1).$$

Par conséquent, $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty$ ne peut pas être nulle et alors la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $[0, +\infty[$.

3. Convergence uniforme sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$:

Soit $a > 0$ et $x \in [a, +\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|f_n(x) - f(x)| = |e^{-nx}\sin(nx)| \leq e^{-nx} \leq e^{-na}.$$

Donc $\sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x)| \leq e^{-na}$, et comme $\lim_{n\to+\infty} e^{-na} = 0$, on a bien $\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x)| = 0$.
Par conséquent la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

4. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a pour tout $x \in [0, +\infty[$, $|e^{-nx}\sin(nx)| \leq e^{-nx}$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-nx}dx$ converge, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-nx}\sin(nx)dx$ converge. De plus

$$\left|\int_0^{+\infty} e^{-nx}\sin(nx)dx\right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-nx}dx = \left[-\frac{1}{n}e^{-nx}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n}.$$

D'autre part $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-nx}\sin(nx)dx = 0$.

EXERCICE 3:

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_n : \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{\sqrt{n}(x+n)} \end{array}$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq1} f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

2. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} f_k(n) \geq \frac{\sqrt{n}}{3\sqrt{2}}$.

   b. En déduire que la série de fonctions $\sum_{n\geq1} f_n$ ne converge pas uniformément sur $[0, +\infty[$.

3. a. La série de fonctions $\sum_{n\geq1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0, +\infty[$.

   b. Soit $a > 0$. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq1} f_n$ converge normalement sur $[0, a,]$.

1 Convergence simple sur $[0, +\infty[$:

Soit $x \in [0, +\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 \leq f_n(x) \leq \dfrac{x}{n^{3/2}}$. De plus la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^{3/2}}$ converge, donc $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge.

1,5 pt Ce qui prouve que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

2 a Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\sum_{k=n+1}^{2n} f_k(n) = \sum_{k=n+1}^{2n} \dfrac{n}{\sqrt{k}(n+k)}$. Pour tout k tel que $n+1 \leq k \leq 2n$, on a $\dfrac{1}{3\sqrt{2n}} \leq \dfrac{n}{\sqrt{k}(n+k)} \leq \dfrac{n}{(2n+1)\sqrt{n+1}}$. Donc

1,5 pt

$$\sum_{k=n+1}^{2n} f_k(n) = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{\sqrt{k}(n+k)} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{3\sqrt{2n}} = n \cdot \frac{1}{3\sqrt{2n}} = \frac{\sqrt{n}}{3\sqrt{2}}$$

b Déduisons qu'on n'a pas de convergence uniforme sur $[0, +\infty[$:
Si on note $R_n(f_n)$ le reste d'ordre n de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ alors on a

$$\|R_n(f_n)\|_\infty = \sup_{x\in[0,+\infty[} \left| \sum_{k\geq n+1} f_k(n) \right| \geq \sum_{k=n+1}^{2n} f_k(n) \geq \frac{\sqrt{n}}{3\sqrt{2}}.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{3\sqrt{2}} = +\infty$, on a $\lim_{n\to+\infty} \|R_n(f_n)\|_\infty = +\infty$. La suite des restes $R_n(f_n)$ ne

1,5 pt converge pas unifomément vers la fonction nulle, donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur $[0, +\infty[$.

3 a Comme la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur $[0, +\infty[$, elle ne peut

0,5 pt converger normalement sur $[0, +\infty[$.

b Convergence normale sur $[0, a]$ avec $a > 0$:

Soit $a > 0$ et $x \in [0, a]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n'(x) = \dfrac{\sqrt{n}}{(x+n)^2} > 0$¿ Donc f_n est une fonction croissante. Par conséquent

$$\sup_{x\in[0,a]} |f_n(x)| = f_n(a).$$

Or la série $\sum_{n\geq 1} f_n(a)$ converge d'après la question 1. Donc $\sum_{n\geq 1} \sup_{x\in[0,a]} |f_n(x)|$ converge. C'est-à-dire que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $[0, a]$.